

Signaux et Systèmes

Chapitre 7

Analyse et synthèse des filtres analogiques

Septembre 2019

TABLE DES MATIERES

7.1 Filtres analogiques: généralités

7.2 Fonctions de transfert rationnelles

7.3 Placement des pôles et zéros

7.4 Synthèse de filtres particuliers

7.1 FILTRES ANALOGIQUES: GENERALITES

- Filtre analogique = système analogique linéaire invariant dans le temps (LIT)
- Classification des filtres analogiques
- Spécifications fréquentielles
- Diagramme de Bode

Filtre analogique = système analogique LIT

- Descriptions mathématiques équivalentes:

- Réponse impulsionnelle

$$h(t) = S_a \{ \delta \} (t)$$

- Réponse indicielle

$$a(t) = S_a \{ u \} (t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

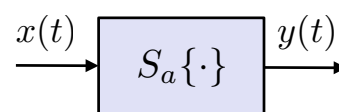
- Réponse fréquentielle

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Fonction de transfert (=notation plus concise)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (\text{Transformation de Laplace})$$

Equivalent à Fourier si l'on pose $s = j\omega$

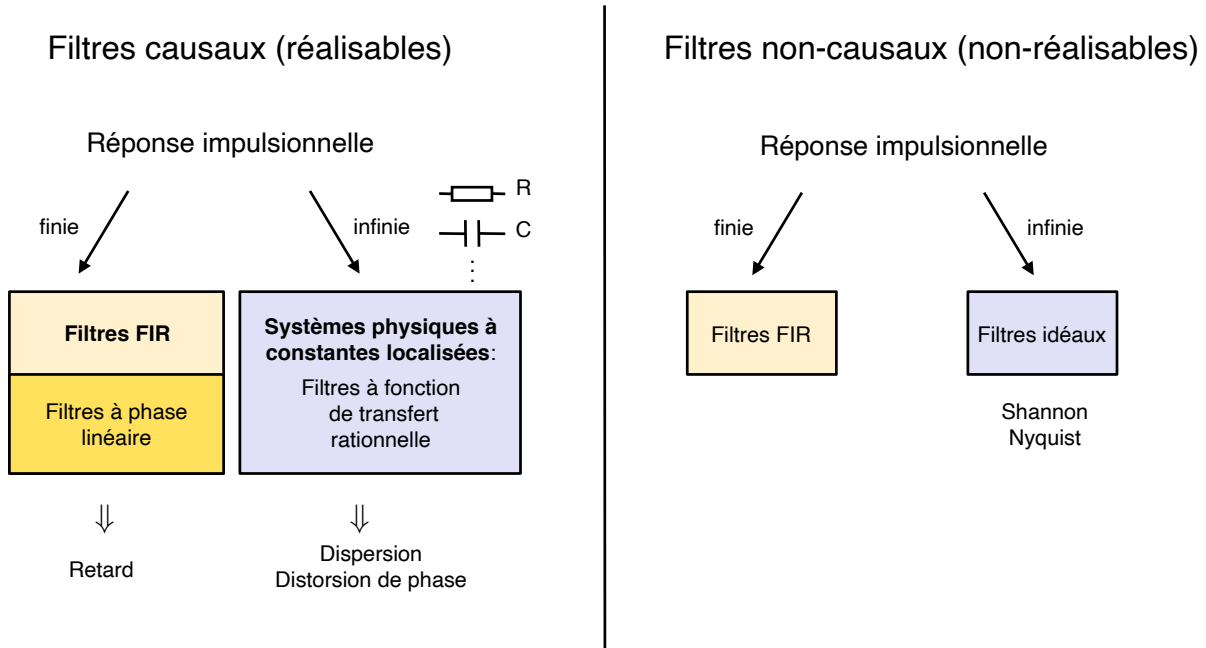


$$y(t) = (h * x)(t)$$

$\updownarrow$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Classification des filtres analogiques



Remarque: la causalité est une contrainte physique liée à la flèche du **temps**. Des filtres non-causaux sont parfaitement réalisables dans d'autres contextes (e.g. systèmes optiques pour le traitement des images)

Spécifications fréquentielles

Les filtres idéaux n'étant pas réalisables, il faut faire des compromis:

- Fluctuations dans la bande passante ($1 \pm \delta_1$)
- Zone de transition (largeur Δ)
- Fluctuations dans la bande bloquante ($0 \pm \delta_2$)

La tolérance par rapport à une réponse idéale est exprimée à l'aide d'un gabarit

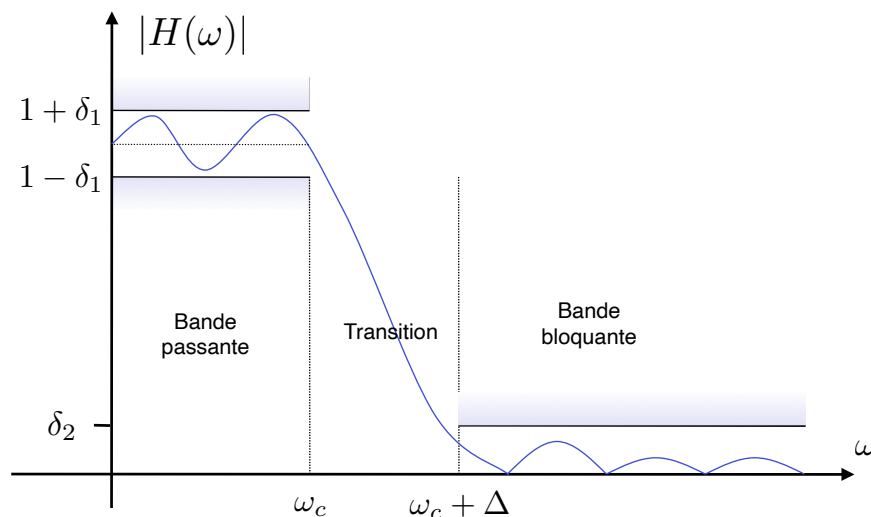


Diagramme de Bode

Réponse fréquentielle: $H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\Phi_H(\omega)}$

■ Diagramme de Bode

- Echelle fréquentielle logarithmique
- Amplitude en décibel: $20 \log_{10} |H(\omega)|$ [dB]
- Phase: $\Phi_H(\omega)$

■ Cas des fonctions de transfert rationnelles

$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

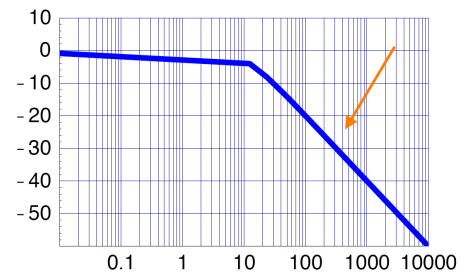
- Forme asymptotique lorsque $\omega \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = \frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}}$$

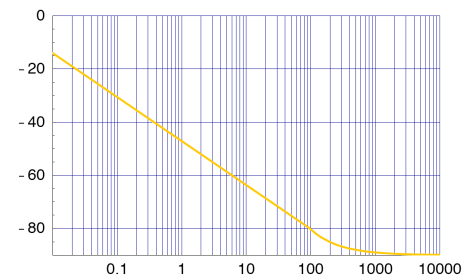
- Amplitude normalisée:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \{20 \log_{10} |H(\omega)|\} = -20(n-m) \log_{10} \omega + \text{const}$$

Amplitude: Pente: $20(n-m)$ dB par décade



Phase:



$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Phi_H(\omega) = -(n-m) \frac{\pi}{2}$$

7.2 FONCTIONS DE TRANSFERT RATIONNELLES

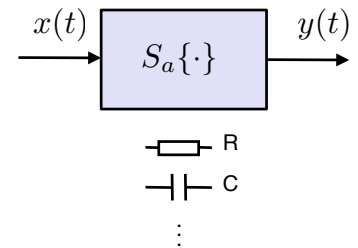
- Fonctions de transfert rationnelles
- Pôles et zéros
- Décomposition en fractions simples
- Détermination de la réponse impulsionnelle
- Exemple de calcul

Fonctions de transfert rationnelles

■ Filtre analogique à constantes localisées (équation différentielle)

Contraintes physiques: $n \geq m$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$



■ Equation du filtre dans le domaine de Fourier

$$(j\omega)^n Y(\omega) + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} Y(\omega) + \dots + a_0 Y(\omega) = b_m (j\omega)^m X(\omega) + \dots + b_0 X(\omega)$$

$$((j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0) Y(\omega) = (b_m (j\omega)^m + \dots + b_0) X(\omega)$$

■ Fonction de transfert

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)}$$

$$P_m(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$$

$$Q_n(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = \text{polynôme caractéristique (cf. Chap 2)!}$$

Pôles et zéros

■ Fonctions de transfert rationnelles

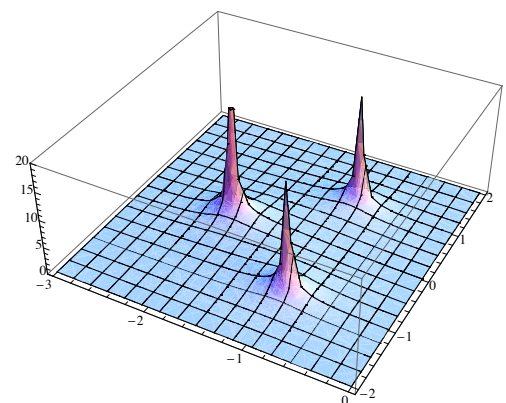
$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=j\omega}$$

■ Factorisation

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})}$$

Zéros: $\{s_{0k}\}_{k=1,\dots,m}$ t.q. $P_m(s_{0k}) = 0$

Pôles: $\{s_{pk}\}_{k=1,\dots,n}$ t.q. $Q_n(s_{pk}) = 0$



■ Pourquoi l'appellation «pôles»?

Une explication parmi d'autres:

Le quotient $P_m(s)/Q_n(s)$ est une fonction dans le plan complexe qui ressemble vaguement à une tente avec des singularités (piquets=«poles» en anglais) en $s = s_{pk}$.

Décomposition en fractions simples

$$H(\omega) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=j\omega} = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})} \quad m \leq n$$

■ Cas de racines simples

$$H(\omega) = \underbrace{b_n}_{=0, \text{ si } n > m} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - s_{pk}} \quad \text{avec} \quad A_i = (s - s_{pi}) \cdot \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=s_{pi}} = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (s_{pi} - s_{0k})}{\prod_{k \neq i} (s_{pi} - s_{pk})}$$

■ Cas de racines multiples

Contribution d'un pôle multiple d'ordre p :

$$\frac{B_1}{j\omega - s_p} + \frac{B_2}{(j\omega - s_p)^2} + \dots + \frac{B_p}{(j\omega - s_p)^p} \quad \text{avec} \quad B_{p-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left((s - s_p)^p \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \right)_{s=s_p}$$

Détermination de la réponse impulsionnelle

■ Cas de racines simples

$$H(\omega) = \underbrace{b_n}_{=0, \text{ si } n > m} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{j\omega - s_{pk}} \\ \downarrow \mathcal{F}^{-1} \\ h(t) = \underbrace{b_n \delta(t)}_{=0, \text{ si } n > m} + \sum_{k=1}^n A_k u(t) \cdot e^{s_{pk} t}$$

⇒ Somme pondérée de modes (cf. Chap. 2)!

$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
$\delta(t)$	1
$u(t) \cdot e^{st}$	$\frac{1}{j\omega - s}, \quad \text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\frac{1}{(j\omega - s)^{n+1}}, \quad \text{Re}\{s\} < 0$
$u(t) \cdot e^{at} \cos \omega_0 t$	$\frac{j\omega - a}{(j\omega - a)^2 + \omega_0^2}, \quad a < 0$
$u(t) \cdot e^{at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(j\omega - a)^2 + \omega_0^2}, \quad a < 0$

■ Contribution d'un pôle multiple (ordre p)

$$\frac{B_1}{j\omega - s_p} + \frac{B_2}{(j\omega - s_p)^2} + \dots + \frac{B_p}{(j\omega - s_p)^p} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left(\sum_{k=1}^p B_k \frac{t_+^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{s_p t}$$

Condition de stabilité BIBO

Tous les pôles dans le demi-plan complexe gauche !

Exemple de calcul

Problème: Calculer la réponse impulsionnelle du filtre: $H(\omega) = \frac{-2\omega^2 + 5}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}$

1. Exprimer $H(\omega)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en $s = j\omega$

$$H(\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 5}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2} \Big|_{s=j\omega}$$

2. Détermination des pôles: $s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow (s_1 = -1, s_2 = -2)$

Le système causal est stable!

3. Décomposition en fractions simples

$$\frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} \quad (\text{remarque: } \lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = b_m = 2)$$

$$A_1 = \frac{2s^2 + 5}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7; \quad A_2 = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

4. Réponse impulsionnelle par transformation de Fourier inverse

$$h(t) = 2\delta(t) + 7u(t) \cdot e^{-t} - 13u(t) \cdot e^{-2t}$$

7.3 PLACEMENT DES POLES ET ZEROS

- Réponse d'amplitude et de phase
- Contribution d'un pôle réel
- Contribution d'un zéro réel
- Contribution d'une paire de pôles conjugués
- Contribution d'une paire de zéros conjugués
- Filtre passe-tout

Fonction de transfert: pôles et zéros

■ Fonctions de transfert rationnelles

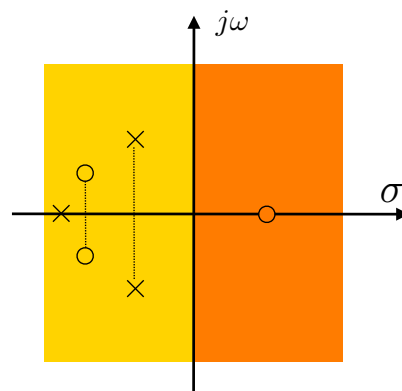
$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \Big|_{s=j\omega} \quad m \leq n$$

Exemples: circuit électrique à constantes localisées

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})}$$

$s_{0k} = \sigma_{0k} + j\omega_{0k}$: zéros de $H(\omega)$ ○

$s_{pk} = \sigma_{pk} + j\omega_{pk}$: pôles de $H(\omega)$ ×



Réponse d'amplitude et de phase

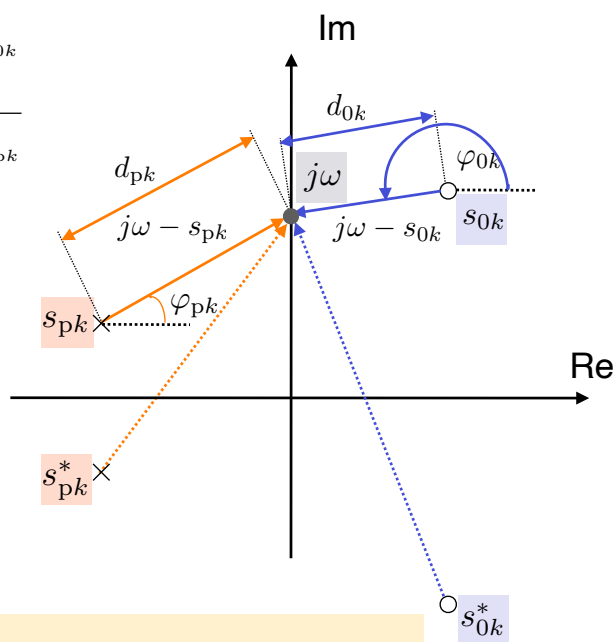
$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^m (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^n (j\omega - s_{pk})} = b_m \frac{\prod_{k=1}^m d_{0k} \cdot e^{j\varphi_{0k}}}{\prod_{k=1}^n d_{pk} \cdot e^{j\varphi_{pk}}}$$

Représentation polaire:

$$j\omega - (\sigma_k + j\omega_k) = d_k \cdot e^{j\varphi_k}$$

$$d_k = \sqrt{\sigma_k^2 + (\omega - \omega_k)^2}$$

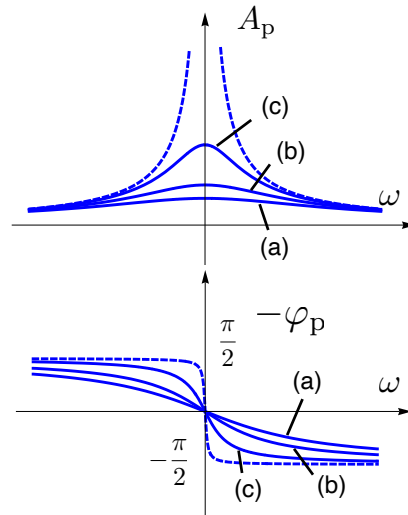
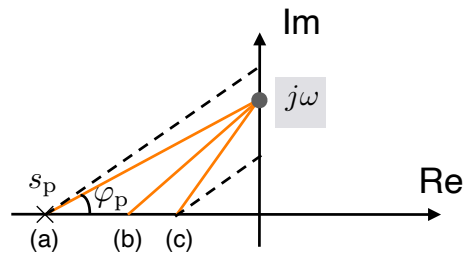
$$\varphi_k = \arctan \frac{\omega - \omega_k}{-\sigma_k}$$



Amplitude: $A_H(\omega) = |b_m| \cdot \frac{\prod_{k=1}^m d_{0k}}{\prod_{k=1}^n d_{pk}}$ Phase: $\Phi_H(\omega) = \sum_{k=1}^m \varphi_{0k} - \sum_{k=1}^n \varphi_{pk}$

Contribution d'un pôle réel

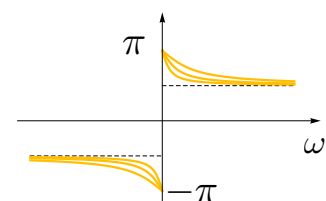
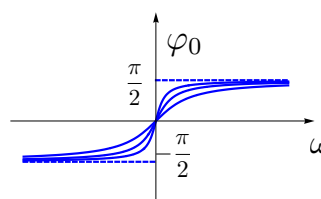
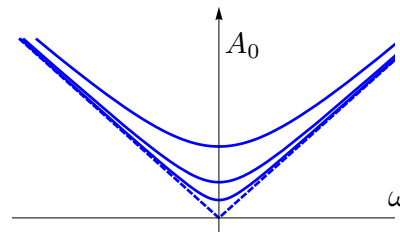
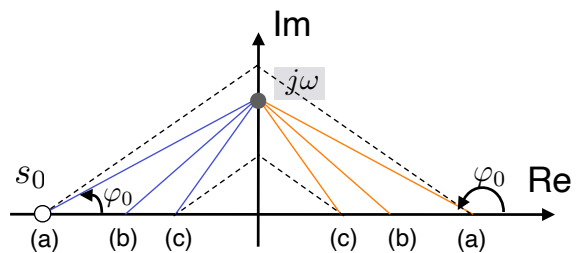
$$s_p = \sigma_p < 0$$



Click for demo

Contribution d'un zéro réel

$$s_0 = \sigma_0$$



$$\sigma_0 < 0$$

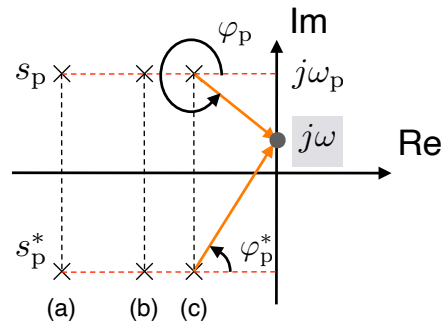
$$\sigma_0 > 0$$

Click for demo

Contribution d'une paire de pôles conjugués

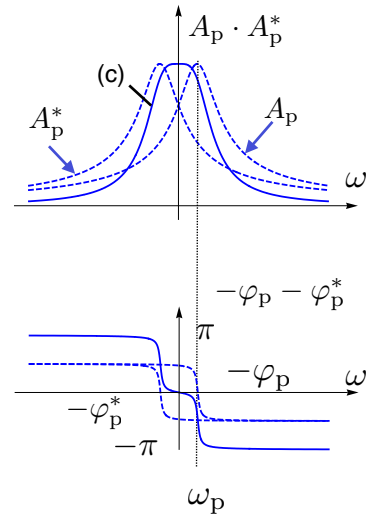
$$s_p = \sigma_p + j\omega_p$$

$$s_p^* = \sigma_p - j\omega_p$$



Placement du/des pôle(s): effets qualitatifs

- Résonance (amplification) à la fréquence ω_p ; d'autant plus forte que le pôle est proche de l'axe imaginaire
- Retard de phase de l'ordre de $\pi/2$ par pôle



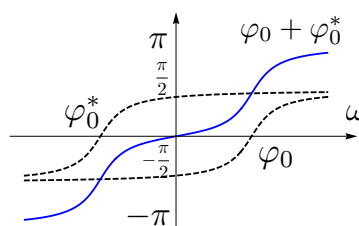
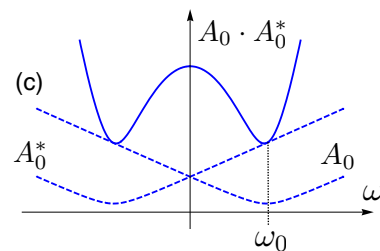
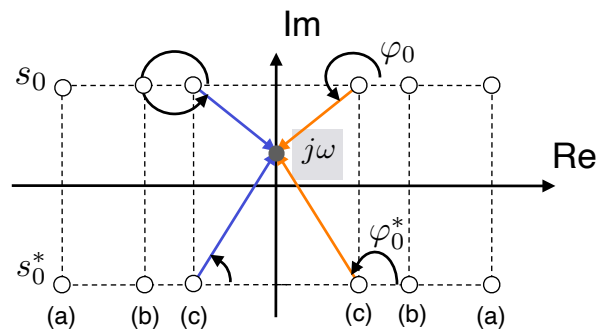
Contribution d'une paire de zéros conjugués

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$$

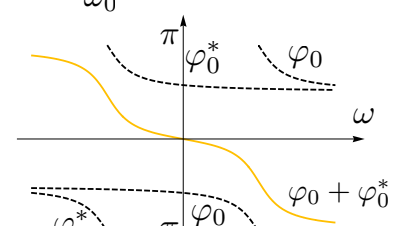
$$s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$$

Placement du/des zéro(s): effets qualitatifs

- Atténuation à la fréquence ω_0 ; d'autant plus forte que le zéro est proche de l'axe imaginaire
- Avance ($\sigma_0 < 0$) ou retard ($\sigma_0 > 0$) de phase de l'ordre de $\pi/2$ par zéro



$$\sigma_0 < 0$$



$$\sigma_0 > 0$$



Filtre passe-tout

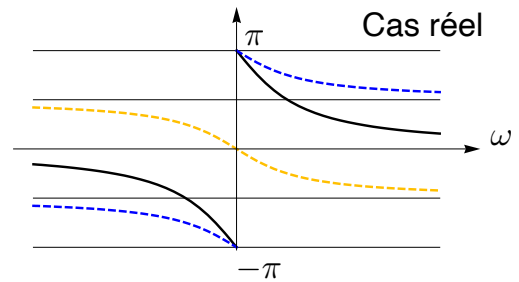
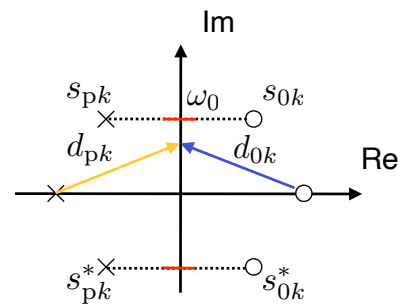
Filtre passe-tout = déphaseur

- Modifie seulement la phase
- Pôles et zéros placés de façon symétrique

$$A_H(\omega) = 1 \quad \forall \omega \quad \Rightarrow \quad A_H(\omega) = \prod_{k=1}^n \underbrace{\frac{d_{0k}}{d_{pk}}}_1$$

$$\sigma_{0k} + j\omega_{0k} = -\sigma_{pk} + j\omega_{pk} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s_{0k} = -s_{pk}^*}$$

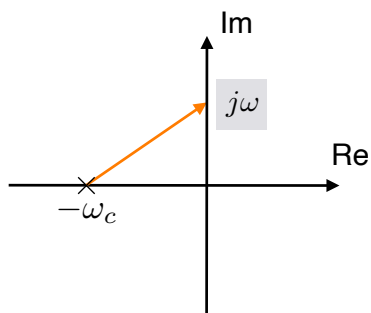
Exemple: $H(\omega) = \frac{j\omega - d}{j\omega + d}$



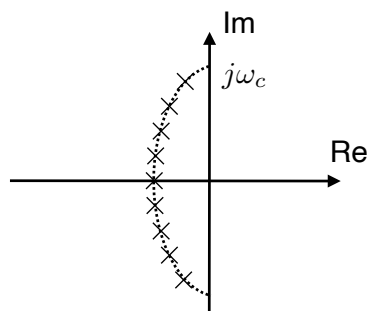
7.4 SYNTHÈSE DE FILTRES PARTICULIERS

- Filtres passe-bas
- Filtres passe-bande
- Filtres à encoches
- Filtres de Butterworth

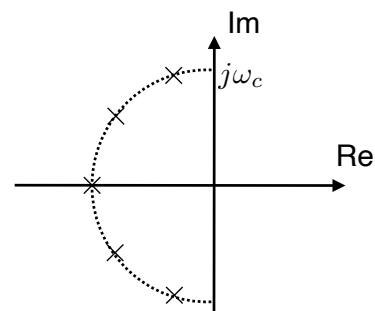
Filtres passe-bas



(a) Filtre du premier ordre ($n = 1$)

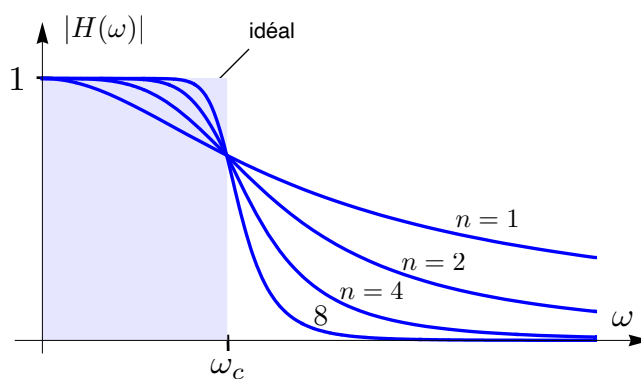


(b) Mur de pôles

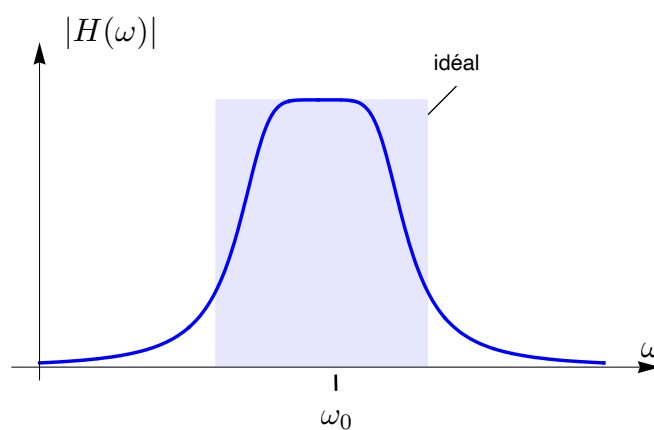
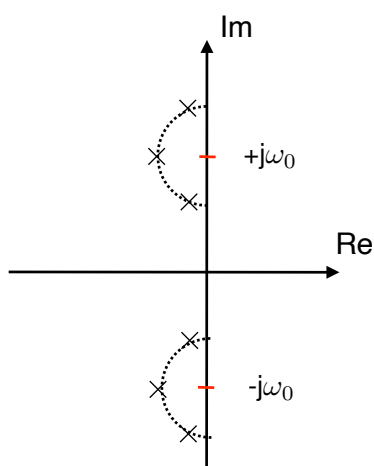


(c) Filtre de Butterworth

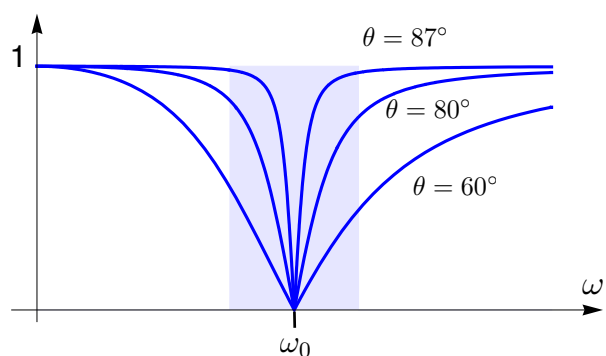
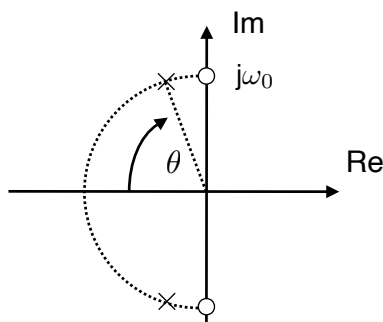
$$H_1(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$



Filtres passe-bande



Filtre à encoche (Notch filter)



■ Contraintes

- $H(\omega_0) = 0 \Rightarrow$ zéros à $s = \pm j\omega_0$
- $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = 1 \Rightarrow$ même nombre de pôles et de zéros ($n = m$)
- $H(0) = 1 \Rightarrow$ pôles et zéros équidistants de l'origine (arc de cercle)

■ Exemple: filtre du 2^{ème} ordre

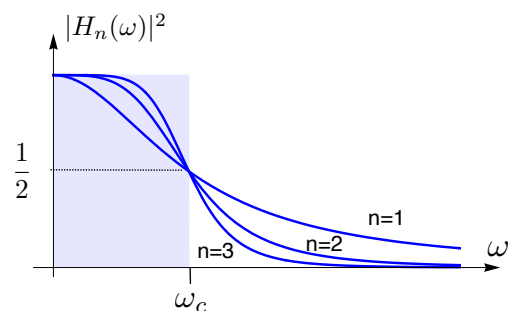
$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + j\omega_0)(j\omega - j\omega_0)}{(j\omega + \omega_0(\cos \theta + j \sin \theta))(j\omega + \omega_0(\cos \theta - j \sin \theta))}$$

Filtres de Butterworth

■ Definition: filtre de Butterworth d'ordre n

$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}$$

ω_c : fréquence de coupure



■ Propriétés de filtrage passe-bas

- Comportement à l'origine: «Maximally Flat Magnitude Filter»

$$|H_n(\omega)|^2 = 1 + O(\omega^{2n})$$

En effect: $\frac{1}{1 + \Delta x} = 1 - \underbrace{\Delta x}_{O(\omega^{2n})} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{O(\omega^{4n})} - \dots$

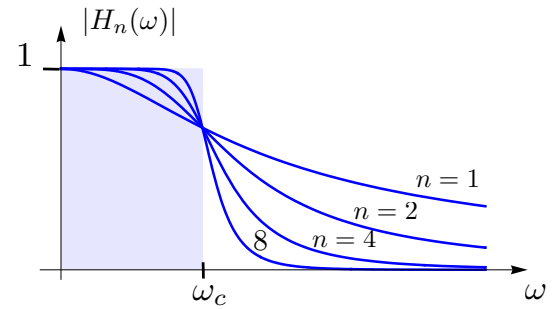
- Comportement asymptotique:

$$|H_n(\omega)| \propto \frac{1}{|\omega|^n} \text{ lorsque } \omega \rightarrow +\infty$$

Filtres de Butterworth (suite)

$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} = \frac{1}{1 + (s/(j\omega_c))^{2n}} \Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{\omega_c^n}{Q_n(j\omega)} \cdot \frac{\omega_c^n}{Q_n(-j\omega)} = H_n(\omega)H_n^*(\omega)$$



■ Pôles de $|H_n(\omega)|^2 = H_n(\omega) \cdot H_n(-\omega)$

$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2n} = -1 \cdot j^{2n} = e^{j\pi(2k-1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}2n} \Rightarrow s_{pk} = \omega_c \cdot e^{j\frac{\pi}{2n}(2k-1+n)}$$

